APUNTES SOBRE INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Concepto de campo.

– Líneas de fuerza del campo gravitatorio.

Las líneas de fuerza son tangentes a los vectores intensidad de campo, definidos en cada uno de los puntos. El sentido de las líneas de fuerza coincide con el sentido con que se desplazará la unidad de masa al dejarla libre sobre dicha línea.

El flujo a través de una superficie situada en el interior de un campo gravitatorio es $\Phi = \vec{g} \cdot \vec{S}$ (donde $\vec{S}$ es el vector superficie)

Si se trata de una superficie cualquiera y de un campo variable: $\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$

– Principio de superposición.

La fuerza que actúa sobre una masa, que forma parte de un conjunto de masas, es la suma vectorial de las fuerzas que cada una de las restantes masas ejercen, por separado sobre ella.

Este principio, así mismo, es válido para los vectores intensidad de campo, de modo que el valor de la intensidad del campo en un punto es el vector intensidad resultante de los vectores intensidad representativos de los campos que actúan sobre dicho punto.

Este principio "no" se cumple en algunos fenómenos cuánticos, aunque sí es válido para el campo gravitatorio y el campo electrostático. "Sí" es aplicable a los campos escalares de potenciales: el potencial en un punto es la suma escalar de los diversos potenciales generados por los diversos campos que actúan sobre dicho punto.

Descripción energética de la interacción gravitatoria.

a) El trabajo de las fuerzas conservativas.

La energía de un sistema se puede transmitir a otros cuerpos de dos formas: irradiándola mediante ondas o mediante una fuerza de interacción.

La medida de la energía transmitida a un cuerpo mediante una fuerza que le produce un desplazamiento recibe el nombre de trabajo. Cuando elevamos un cuerpo a una cierta altura, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es negativo (nosotros realizaríamos un trabajo positivo):

$W = \mathbf{F}\cdot ?\,\mathbf{r} = F\cdot ?r\cdot \cos\ a = -m\cdot g\cdot (y_f - y_o) = -m\cdot g\cdot h$ (a =180°)

Por el contrario, cuando el cuerpo cae retornando a su punto de partida, la fuerza gravitatoria realiza un trabajo positivo (nosotros realizaríamos un trabajo negativo):

$W = \mathbf{F}\cdot ?\,\mathbf{r} = F\cdot ?r\cdot \cos\ a = -m\cdot g\cdot (y_f - y_o) = -m\cdot g\cdot (-h) = m\cdot g\cdot h$ (a=0°)

Estos trabajos positivo y negativo se anulan mutuamente y el trabajo total realizado sobre el objeto tras describir una trayectoria cerrada es cero. Por trayectoria cerrada entendemos aquella que comienza y acaba con el mismo punto. Es como si, al elevar nosotros un cuerpo venciendo la gravedad, gastáramos energía y, una vez elevado, al soltarlo, el cuerpo vuelve al punto de partida sin que sea necesario para ello realizar un trabajo; la fuerza de la gravedad durante la caída restituye la energía que gastamos en la elevación. Este tipo de fuerzas que restituyen la energía consumida en vencerlas reciben el nombre de fuerzas conservativas.

Una fuerza es conservativa si el trabajo total realizado sobre un objeto, cuando éste describe una trayectoria cerrada, es cero. La fuerza gravitatoria y la fuerza elástica de un resorte son conservativas.

b) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa.

Toda fuerza conservativa lleva asociada una magnitud característica llamada energía potencial (E_P o U).

Si elevamos un cuerpo desde un punto A hasta otro punto B debemos hacer un trabajo (nosotros) para vencer el peso del cuerpo:

$W = m\cdot g\cdot (y_B - y_A) = m\cdot g\cdot h = ?E_P$

Este trabajo realizado se emplea en producir una variación en una magnitud E_P que recibe el nombre de energía potencial. Por consiguiente, un cuerpo colocado en un punto del campo gravitatorio terrestre lleva asociada una energía potencial que coincide con el trabajo realizado (por nosotros) para colocarlo en el punto en que se encuentra; por eso, la energía potencial recibe el nombre de energía de posición.

En general, se llama energía potencial a la magnitud cuya disminución mide el trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria. Para una fuerza conservativa como lo es la fuerza gravitatoria, la expresión anterior toma la forma siguiente:

$W = -m\cdot g\cdot (y_B - y_A) = -m\cdot g\cdot y_B + m\cdot g\cdot y_A = E_{PA} - E_{PB} = -?E_P$

Si las posiciones A y B coinciden, es decir, si la partícula describe un camino cerrado, se cumplirá que $E_{PA} - E_{PB} = 0$ y el trabajo realizado por la fuerza es cero.

Teorema de la energía potencial:

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la variación de la energía potencial del cuerpo sobre el que actúa, tomando como minuendo la energía potencial del punto de partida.

Energía potencial gravitatoria.

a) Energía potencial asociada a dos partículas.

Integrando el producto escalar de la fuerza gravitatoria entre dos masas por el vector distancia entre ellas, nos queda la siguiente expresión del trabajo realizado por las fuerzas gravitatorias cuando pasamos del infinito a un punto B una de las masas, manteniendo fija la otra:

$W=-(G\cdot m_1\cdot m_2)/r_B$

La expresión anterior simboliza la energía potencial gravitatoria porque representa el trabajo realizado por una fuerza conservativa. De dicha expresión se deducen las siguientes consecuencias:

- Que a cada posición relativa de dos masas corresponde una energía potencial:
  $U(r)=E_P(r)=-(G\cdot m_1\cdot m_2)/r$
- Que a la posición infinito corresponde una energía potencial nula.
- Que la energía potencial gravitatoria es siempre negativa. El sentido físico de este signo menos es el siguiente:

Según el teorema de la energía potencial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la disminución de la energía potencial. Por consiguiente, a medida que la fuerza gravitatoria realiza el trabajo de aproximación de las dos masas, la energía potencial disminuye. Si inicialmente la energía potencial era cero, forzosamente al final del desplazamiento será negativo.

Conclusiones:

1. Cuando dos cuerpos se aproximan, la energía potencial disminuye. El trabajo de aproximación lo realiza la fuerza gravitatoria a costa de la energía potencial.
2. Cuando separamos dos masas hay que aplicar una fuerza exterior al sistema. Esta fuerza realiza un trabajo que se emplea en aumentar la energía potencial, la cual tomará su valor máximo en el infinito.
3. La energía potencial asociada a un sistema formado por más de dos partículas se obtiene sumando las energías correspondientes a los sistemas que se pueden formar con las partículas dadas tomadas dos a dos.

b) Variación de la energía potencial entre dos puntos A y B.

Viene dada por la siguiente expresión:

$$DE_P = E_P(B) - E_P(A) = -G\frac{m_1 m_2}{r_B} - \left(G\frac{m_1 m_2}{r_A}\right) = G\frac{m_1 m_2}{r_A} - G\frac{m_1 m_2}{r_B} = Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Si $r_B=r_A=r$(constante), la partícula m_2 se desplaza sobre una superficie esférica cuyo centro está en m_1 y cuyo radio vale r. En este caso la energía potencial permanece constante. Esta superficie recibe el nombre de superficie equipotencial (ver más adelante).

c) Energía potencial gravitatoria terrestre.

Las fórmulas obtenidas en los dos apartados anteriores son aplicables aquí haciendo $m_1=M$ (masa de la Tierra) y $m_2=m$ (masa del cuerpo). Cuando un cuerpo se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra:

$U(r)=E_P(r)=-(G\cdot m_1\cdot m_2)/(R+h)$

donde R es el radio de la Tierra y h la altura sobre la superficie.

La variación que experimenta esta energía gravitatoria terrestre cuando elevamos un cuerpo desde la superficie de la Tierra hasta una altura h (R>>h) viene dada por la expresión del apartado 'b' aplicada a esta situación: $?E_P=m\cdot g\cdot h=m\cdot g\cdot(h_B-h_A)$, que representa la energía potencial de un cuerpo en función de la gravedad. Para llegar a este resultado se ha tenido en cuenta:

1. Que $g=G\cdot M/R^2$.
2. Que si h<<R, entonces (h/R)=0.

El término energía potencial implica que un cuerpo que posee dicha energía tiene la capacidad de ganar energía cinética, cuando se libera desde algún punto, bajo la influencia de la gravedad.

Para aplicar correctamente la fórmula $E_P=m\cdot g\cdot h$, se debe tener presente lo siguiente:

1. Que representa variaciones de energía potencial. Por tanto, solamente tiene sentido cuando se establece un nivel de referencia. Este nivel de referencia se toma arbitrario, pero es necesario especificarlo en cada caso.
2. La energía potencial se mide en julios en el S.I. Para lo cual la masa se expresará en kg y el desplazamiento en m. La aceleración de la gravedad se toma como 9,8 $m\cdot^{-2}$.
3. La variación de la energía potencial entre dos puntos puede ser positiva (h>0) o negativa (h<0), en función de los ejes de coordenadas (hacia dónde nos desplazamos, parte positiva o parte negativa).
4. Dicha fórmula sólo es válida mientras la fuerza de la gravedad permanezca constante, es decir, mientras los desplazamientos del cuerpo sean pequeños comparados con el radio de la Tierra.
5. Para grandes alturas se debe utilizar la fórmula general:

$$\Delta E_P = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

<u>Potencial gravitatorio</u>.

a) <u>Campo de potenciales</u>.

A cada punto del espacio que rodea a una masa se le adjudica un valor escalar llamado potencial, que es función de las coordenadas del punto. Representa el trabajo efectuado al traer la <u>unidad</u> <u>de</u> <u>masa</u> desde el infinito hasta el punto.

Como cada punto del espacio posee un potencial, se forma el campo escalar de potenciales.

g = - **grad V**   **grad V** = (dV/dx) **i** + (dV/dy) **j** + (dV/dz) **k**

b) <u>Cálculo del potencial gravitatorio en un punto</u>.

Se toma como origen el infinito y le damos al potencial de ese punto el valor cero:

$$V = \int_A^B \frac{\vec{F}}{m} d\vec{r}\ ;\ \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow V = -\int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B \left(-G\frac{m}{r^3}\right)\vec{r}\cdot d\vec{r} = \int_A^B G\frac{m}{r^3}\left(\vec{r}\cdot d\vec{r}\right)$$

Para calcular el potencial (V) en el punto P, integramos entre el infinito ($V_\infty = 0$), y P. El vector de posición del punto P respecto a la masa que crea el campo es $\mathbf{r_{OP}}$.

$$V = G\,m\int_\infty^{r_{OP}} \frac{1}{r^3}\cdot r\cdot dr\cdot \cos 0^o = G\,m\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^{r_{OP}} = -G\frac{m}{r_{OP}}$$

Siendo m la masa que crea el campo gravitatorio. En el S.I. V se expresa en J/kg.

c) <u>Diferencia de potencial entre dos puntos A y B</u>.

Es igual al trabajo necesario (trabajo externo) para mover la unidad de masa entre dos puntos, A y B. Se integra entre r_{OA} y r_{OB}:

$$V_{AB} = \int_{r_{OA}}^{r_{OB}} G\frac{m}{r^2}\,dr = G\,m\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_{OA}}^{r_{OB}} = -G\frac{m}{r_{OB}} - \left(-G\frac{m}{r_{OA}}\right) = V_B - V_A$$

<u>Trabajo</u>.

El trabajo necesario (trabajo externo) para mover una masa cualquiera m_P de un punto A a otro B es:

$W_{AB} = m_P\cdot(V_B - V_A)$

Si $W_{AB} > 0$: trabajo aportado al sistema.

Si $W_{AB} < 0$: trabajo realizado por el campo.

Nota: $E_P = m\cdot V$

d) <u>Superficies equipotenciales</u>.

En los campos gravitatorio y eléctrico, a las superficies equiescalares se les llama superficies equipotenciales, al ser el campo de potenciales un campo escalar.

Propiedades:

1. Por un punto sólo pasa una superficie equipotencial. Si un punto P pertenece a dos superficies equipotenciales, tendría más de un potencial.
2. El trabajo necesario para desplazar una masa entre dos puntos pertenecientes a una misma superficie equipotencial es nulo. Demostración:

   $W = m\cdot(V_M - V_N)$; $V_M = V_N \Rightarrow W = 0$
3. Los vectores intensidad de campo, **g**, son perpendiculares a las superficies equipotenciales, y como consecuencia, también lo son las líneas de fuerza. Demostración:

   dV = - g·dr

   dW = m·dV = - m·**g**·**dr**

dW = 0 (puntos de la superficie equipotencial)

por tanto, g·dr·cosa = 0 è a = 90° c.q.d.

<u>Aplicación del modelo newtoniano del mundo al movimiento de satélites y planetas (ver libro y apuntes de clase)</u>.

a) <u>Velocidad orbital de un satélite</u>.
b) <u>Velocidad de escape de un cohete</u>.
c) <u>Energía mecánica de un satélite</u>.
d) <u>Cambio de órbita de un satélite</u>.
e) <u>Órbita de un satélite en función de su velocidad</u>.

<u>Teorema de Gauss</u>.

a) <u>Concepto</u>.

El flujo total del campo gravitatorio de Intensidad I, que atraviesa una superficie cerrada, es igual al producto de la masa total encerrada dentro del volumen que limita la superficie multiplicado por 4? veces la constante de gravitación:

$$\Phi_S = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\, G\, m$$

Si en vez de una masa, tenemos en el interior de la superficie un conjunto de masas m_i , aceptando el principio de superposición, el flujo saliente a través de una superficie cualquiera que envuelva al sistema de masas m_i será:

$$\Phi = -4\pi\, G \sum m_i$$

El signo negativo indica que es un flujo entrante. A la superficie auxiliar buscada para resolver la integración, y a otras similares, se les llama "superficies gaussianas".

b) <u>Aplicación a distribuciones de simetría simple</u>.

Entre las aplicaciones del teorema de Gauss se encuentra:

1. Variación de la gravedad con la altitud. Si g_o es el valor de la gravedad en la superficie de la Tierra, el valor de g a una altura h es:

$$g_h = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

2. Variación de la gravedad con la aproximación al centro de la Tierra. Si x es la distancia del punto considerado al centro de la Tierra, la gravedad en ese punto es:

$$g_h = g_0 \frac{x}{R_T}$$